Acta Sci. Math. 47 (1984), 405—412

О разрывности сопряженной функции

В. И. КОЛЯДА

Пусть $f(x)$ — 2π-периодическая суммируемая функция, и

$$\tilde{f}(x) = \lim_{\varepsilon\to+0}\left\{-(1/\pi)\int_{\varepsilon}^{\pi}\left(f(x+t)-f(x-t)\right)/(2\operatorname{tg} t/2)\,dt\right\}$$

— функция, сопряженная к $f(x)$. Н. Н. Лузин впервые обратил внимание на то, что сопряженная функция $\tilde{f}(x)$ может быть несуммируемой ни на одном интервале $\Delta\subset[0, 2\pi]$. Более того, Н. Н. Лузин [1] доказал существование абсолютно непрерывной функции $F(x)$, сопряженная к которой существенно неограничена на любом интервале.

Измеримую на интервале Δ функцию $\varphi(x)$ будем называть существенно непрерывной в точке $x_0\in\Delta$, если существует функция $\varphi^*(x)$, эквивалентная $\varphi(x)$ и непрерывная в точке x_0; в противном случае говорят, что $\varphi(x)$ существенно разрывна в точке x_0.

В примере Лузина функция $\tilde{F}(x)$ существенно разрывна всюду; однако она является функцией 1-го класса Бэра, и $\lim_{x\to\xi}\tilde{F}(x)=-\infty$ в каждой точке ξ некоторого множества 2-ой категории. В связи с этим возникает вопрос: если функция $F(x)$ абсолютно непрерывна, а сопряженная к ней функция $\tilde{F}(x)$ ограничена, то не обязана ли $\tilde{F}(x)$ иметь точки существенной непрерывности?

Ответ на этот вопрос отрицателен. Именно, в предлагаемой статье (теорема 1) строится пример абсолютно непрерывной функции, сопряженная к которой существенно ограничена и всюда существенно разрывна.

Далее, пусть E — множество всех тех точек $x\in[0, 2\pi]$, в которых существует сопряженная функция $\tilde{f}(x)$. В статье устанавливается (теорема 2), что для каждой суммируемой функции $f(x)$ сопряженная к ней $\tilde{f}(x)$ обладает следующими свойствами: для любого интервала $\Delta\subset[0, 2\pi]$ точная верхняя грань функции $\tilde{f}(x)$ на множестве $\Delta'=E\cap\Delta$ не изменяется при выбрасывании из Δ' произвольного нуль-множества; существенная непрерывность функции $\tilde{f}(x)$ в точке x_0

Поступило 7 марта 1983.

равносильна ее обычной непрерывности в этой точке по множеству E. Эти факты интересно сопоставить с теоремой Шеффера—Лебега ([2], стр. 77), выражающей аналогичные свойства производной функции.

Таково содержание работы; перейдем теперь к детальному изложению ее результатов.

Лемма 1. *Пусть ε и η — положительные числа. Тогда существует неотрицательная 2π-периодическая функция $f_{\varepsilon,\eta}\equiv f\in L$, обладающая следующими свойствами:*

$$\int_0^{2\pi} f(t)\,dt<\varepsilon; \tag{1}$$

$$g(x)\equiv\int_0^{2\pi} f(t)\big|\ln|\sin(x-t/2)|\big|\,dt<2 \quad \textit{для всех} \quad x; \tag{2}$$

$$g(x)\lesssim\varepsilon \quad \textit{для всех} \quad x\in[\eta,2\pi]; \tag{3}$$

$$g(x) \quad \textit{непрерывна на} \quad (0,2\pi); \tag{4}$$

$$\textit{для любого} \quad \delta>0, \quad \inf_{0<x<\delta} g(x)<\varepsilon, \quad \sup_{0<x<\delta} g(x)>1. \tag{5}$$

Доказательство. Будем считать, что $\varepsilon<1$ и $\eta<1$. Положим $\varphi(t)=$ $=|\ln|\sin t/2||$, $\alpha_k=\eta 2^{-k^2}$ $(k=1,2,\dots)$, и выберем положительную убывающую последовательность $\{\delta_k\}$ так, чтобы было

$$\varphi(\alpha_k/4)<(\varepsilon/2^{k+2})\varphi(\delta_k), \tag{6}$$

$$\delta_k<\alpha_k/8, \quad k=1,2,\dots. \tag{7}$$

Обозначим $I_k=[\alpha_k-\delta_k,\alpha_k]$, $N_k=1/\delta_k\varphi(\delta_k)$. Отрезки I_k попарно не пересекаются, поскольку

$$\alpha_k-\alpha_{k+1}\geqq 7\alpha_k/8. \tag{8}$$

Положим

$$f(t)=\begin{cases} N_k, & t\in I_k \quad (k=1,2,\dots) \\ 0, & t\in[0,2\pi]\setminus\bigcup_{j=1}^{\infty} I_j, \end{cases}$$

$f(t+2\pi)=f(t)$. Покажем, что функция f обладает требуемыми свойствами. Прежде всего, в силу (6),

$$\int_0^{2\pi} f(t)\varphi(t)\,dt=\sum_{k=1}^{\infty} N_k\int_{I_k}\varphi(t)\,dt<\sum_{k=1}^{\infty} N_k\delta_k\varphi(\alpha_k/4)<\varepsilon\sum_{k=1}^{\infty}2^{-k-2}<\varepsilon; \tag{9}$$

отсюда, в частности, следует (1).

Далее, заметим, что для любого $x \in [0, 2\pi]$

$$\int_{I_k} f(t)\varphi(x-t)\,dt \leqq 2N_k \int_0^{\delta_k/2} \varphi(u)\,du < 3/2.$$

Пусть $x \in [(\alpha_k+\alpha_{k+1})/2, \alpha_k]$. Тогда

$$\int_0^{2\pi} f(t)\varphi(x-t)\,dt = \sum_{j=1}^{\infty} \int_{I_j} f(t)\varphi(x-t)\,dt < (3/2) + \sum_{j\neq k} \int_{I_j} f(t)\varphi(x-t)\,dt.$$

При $j>k$ и $t \in I_j$ имеем $x-t>\alpha_k/4$ (см. (8)), и, в силу (6),

$$\begin{aligned} \sum_{j=k+1}^{\infty} \int_{I_j} f(t)\varphi(x-t)\,dt &< \varphi(\alpha_k/4) \sum_{j=k+1}^{\infty} \int_{I_j} f(t)\,dt = \\ &= \varphi(\alpha_k/4) \sum_{j=k+1}^{\infty} [\varphi(\delta_j)]^{-1} < \varepsilon \sum_{j=k+1}^{\infty} 2^{-j-2} \leqq \varepsilon/4. \end{aligned} \tag{10}$$

Далее, если $1 \leqq j < k$, и $t \in I_j$, то (см. (7) и (8)) $|x-t|>\alpha_j/4$, и

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{k-1} \int_{I_j} f(t)\varphi(x-t)\,dt &\leqq \sum_{j=1}^{k-1} \varphi(\alpha_j/4) \int_{I_j} f(t)\,dt = \\ &= \sum_{j=1}^{k-1} \varphi(\alpha_j/4)/\varphi(\delta_j) < \varepsilon \sum_{j=1}^{k-1} 2^{-j-2} < \varepsilon/4. \end{aligned} \tag{11}$$

Таким образом, $g(x)=\int_0^{2\pi} f(t)\varphi(x-t)\,dt<2$ для всех $x \in [(\alpha_k+\alpha_{k+1})/2, \alpha_k]$. Аналогично убеждаемся в справедливости этого неравенства в случае $x \in [\alpha_{k+1}, (\alpha_k+\alpha_{k+1})/2]$, а также в случае $x \in [\alpha_1, \eta]$.

Пусть теперь $x \in [\eta, 2\pi]$. Если $\eta \leqq x < \pi$, то для всех $t \in I_j$ $(j=1, 2, \ldots)$, $\alpha_1 \leqq x-t<\pi$, $\varphi(x-t) \leqq \varphi(\alpha_1)$, и

$$g(x) \leqq \varphi(\alpha_1) \sum_{j=1}^{\infty} [\varphi(\delta_j)]^{-1} \leqq \varepsilon \sum_{j=1}^{\infty} 2^{-j-2} < \varepsilon.$$

Если же $\pi \leqq x \leqq 2\pi$, то, как легко видеть, $\varphi(x-t)<\varphi(t)$ для $t \in [0, \alpha_1]$; следовательно (см. (9)), $g(x) \leqq g(0) < \varepsilon$. Таким образом, свойство (3) выполняется.

Далее, чтобы установить непрерывность функции $g(x)$ в произвольной точке $\xi \in (0, 2\pi)$, возьмем отрезок $[\alpha, \beta] \subset (0, 2\pi)$, такой, что $\alpha<\xi<\beta$. Тогда для любого $\sigma>0$ найдется такое $\tau>0$, что при всех $x \in [\alpha, \beta]$

$$\int_0^{\tau} f(t)\varphi(x-t)\,dt < \delta.$$

Остается учесть еще, что функция

$$g^*(x) = \int_{\tau}^{2\pi} f(t)\varphi(x-t)\,dt$$

непрерывна, поскольку $f(t)$ ограничена на $[\tau, 2\pi]$.

Наконец, заметим, что при любом k

$$g(\alpha_k) > \int_{I_k} f(t)\varphi(\alpha_k - t)\,dt = N_k \int_0^{\delta_k} \varphi(u)\,du > 1.$$

С другой стороны, если $\beta_k = (\alpha_k + \alpha_{k+1})/2$, то, пользуясь оценками (10) и (11), и учитывая, что $t - \beta_k > \alpha_k/4$ для всех $t \in I_k$ (см. (7) и (8)), получаем, в силу (6):

$$g(\beta_k) < (\varepsilon/2) + \int_{I_k} f(t)\varphi(\beta_k - t)\,dt < (\varepsilon/2) + \varphi(\alpha_k/4)/\varphi(\delta_k) < \varepsilon.$$

Таким образом, имеет место свойство (5). Лемма доказана.

Теорема 1. *Существует 2π-периодическая абсолютно непрерывная функция $F(x)$, такая, что сопряженная функция $\tilde{F}(x)$ существенно ограничена и всюду существенно разрывна.*

Доказательство. Пусть $\{\varrho_k\}$ — последовательность всех рациональных точек отрезка $[0, 2\pi]$, $\varrho_0 = 0$, и $\varepsilon_k = 2^{-2k-1}$ $(k = 0, 1, \ldots)$, $\eta_0 = 1/2$. Применяя лемму 1, положим $f_0(t) = f_{\varepsilon_0, \eta_0}(t)$, и по индукции построим последовательность положительных чисел $\{\eta_k\}_{k=1}^{\infty}$, последовательность $\{\sigma_k\}_{k=0}^{\infty}$ с $|\sigma_k| = 1$ $(\sigma_0 = 1)$, и последовательность функций $f_k(t) = f_{\varepsilon_k, \eta_k}(t - \varrho_k)$; выбор этих последовательностей будем производить, исходя из свойств (4) и (5) функций

$$g_k(x) = \int_0^{2\pi} f_k(t)\varphi(x-t)\,dt \quad (\varphi(t) = \big|\ln|\sin(t/2)|\big|)$$

так, чтобы выполнялись следующие условия:

(a) $\Delta_k \equiv [\varrho_k, \varrho_k + \eta_k] \subset (0, 2\pi)$, $k = 1, 2, \ldots$;

(b) $\eta_k < 2^{-k} \min\limits_{0 \leq j < k} \mu_j$, где μ_j — наименьшая из мер множеств $I_j' = \{x \in \Delta_j \colon g_j(x) < \varepsilon_j\}$, $I_j'' = \{x \in \Delta_j \colon g_j(x) > 1\}$;

(c) колебание функции $S_{k-1}(x) = \sum\limits_{j=0}^{k-1} \sigma_j g_j(x)$ на отрезке Δ_k меньше ε_k;

(d) если $S_{k-1}(\varrho_k) \geq 0$, то $\sigma_k = -1$; в противном случае $\sigma_k = 1$.

Поскольку $\int_0^{2\pi} f_k(t)\,dt < \varepsilon_k$ (см. (1)), то ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \sigma_k f_k(t)$ сходится в L к некоторой суммируемой функции $f(t)$. Пусть

$$g(x) = \int_0^{2\pi} f(t)\varphi(x-t)\,dt.$$

Ясно, что ряд $\sum_{k=0}^{\infty} \sigma_k g_k(x)$ сходится к $g(x)$ в L. Покажем, что $g(x)$ существенно ограничена и всюду существенно разрывна.

Прежде всего установим, что для всех x

$$|S_n(x)| \leqq 2+\varepsilon_0+\ldots+\varepsilon_n \quad (n = 0, 1, \ldots). \tag{12}$$

Для $n=0$ (12) выполнено (см. (2)). Предположим, что (12) имеет место для некоторого $n \geqq 1$. Если $x \in [0, 2\pi] \setminus \Delta_{n+1}$, то, в силу (3), $g_{n+1}(x) < \varepsilon_{n+1}$, и

$$|S_{n+1}(x)| \leqq |S_n(x)|+|g_{n+1}(x)| \leqq 2+\varepsilon_0+\ldots+\varepsilon_{n+1}.$$

Пусть $x \in \Delta_{n+1}$. Если $S_n(\varrho_{n+1}) \geqq 0$, то, в силу (12) и свойства (c),

$$-\varepsilon_{n+1} < S_n(x) \leqq 2+\varepsilon_0+\ldots+\varepsilon_n.$$

Поскольку $S_{n+1}=S_n-g_{n+1}$ (см. (d)), а в силу (2) $0 \leqq g_{n+1}(x) < 2$, то

$$-2-\varepsilon_{n+1} < S_{n+1}(x) \leqq 2+\varepsilon_0+\ldots+\varepsilon_n.$$

Аналогично, в случае, когда $S_n(\varrho_{n+1}) < 0$, по свойству (c) имеем для $x \in \Delta_{n+1}$

$$-(2+\varepsilon_0+\ldots+\varepsilon_n) \leqq S_n(x) < \varepsilon_{n+1};$$

поскольку $S_{n+1}=S_n+g_{n+1}$, то получаем

$$-(2+\ldots+\varepsilon_0+\varepsilon_n) \leqq S_{n+1}(x) < 2+\varepsilon_{n+1}.$$

Таким образом, по индукции установлена справедливость неравенства (12). В силу этого неравенства, $|S_n(x)| < 3$ при всех n и всех x. Следовательно, $|g(x)| \leqq 3$ почти всюду.

Пусть теперь $\Delta \subset [0, 2\pi]$ — произвольный интервал. Покажем, что существенное колебание функции $g(x)$ на интервале Δ больше 1/2. Очевидно, существует номер $k \geqq 1$, такой, что $\Delta_k \subset \Delta$. Полагая $E_k = \Delta_k - \bigcup_{j=k+1}^{\infty} \Delta_j$, получим, в силу свойства (b)

$$|E_k| \geqq \eta_k - 2^{-k}\mu_k \geqq \eta_k - \mu_k/2. \tag{13}$$

Но для всех $x \in E_k$ при любом $n > k$

$$|S_n(x)-S_k(x)| \leqq \sum_{j=k+1}^{\infty} \varepsilon_j < \varepsilon_k/2.$$

Следовательно, $|g(x)-S_k(x)| \leqq \varepsilon_k/2$ почти всюду на E_k. В силу (13) (см. также (b)) множества $I'_k \cap E_k$ и $I''_k \cap E_k$ имеют положительные меры, причем на первом из них выполняется неравенство $|g(x)-S_{k-1}(x)| < 3\varepsilon_k/2$, а на втором $|g(x)-S_{k-1}(x)| > 1-\varepsilon_k/2$. Следовательно, существенное колебание $g(x)-S_{k-1}(x)$ на Δ_k больше, чем $1-2\varepsilon_k$. Учитывая, что колебание $S_{k-1}(x)$ на Δ_k меньше ε_k

(см. (с)), получаем, что существенное колебание функции $g(x)$ на интервале Δ_k (а следовательно, и на Δ) больше 1/2. В силу произвольности интервала Δ, отсюда следует, что функция $g(x)$ существенно разрывна в каждой точке $[0, 2\pi]$.

Положим теперь

$$F(x) = \int_0^x f(t)\,dt - c_0 x, \quad \text{где} \quad c_0 = (1/2\pi)\int_0^{2\pi} f(t)\,dt.$$

Функция $F(x)$ абсолютно непрерывна и имеет период 2π. Сопряженная к ней функция $\tilde{F}(x)$, представляемая формулой Лузина ([3], стр. 556)

$$\tilde{F}(x) = -(1/\pi)\int_0^{2\pi} [f(x_0+t)-c_0]\varphi(t)\,dt =$$

$$= -(1/\pi)\int_1^{2\pi} f(x+t)\varphi(t)\,dt + c_1 = -(1/\pi)g(x)+c_1$$

существенно ограничена и всюду существенно разрывна. Теорема доказана.

Лемма 2. *Пусть $f\in L$, и существует $\tilde{f}(x_0)=y_0$. Тогда для любых положительных чисел ε и δ*

$$\operatorname{mes}\{x\in(x_0-\delta, x_0+\delta)\colon \tilde{f}(x) < y_0+\varepsilon\} > 0.$$

Доказательство. Будем предполагать, что $x_0=0$. Пусть существуют $\varepsilon>0$ и $\delta>0$, такие, что $\tilde{f}(x) \geqq y_0+\varepsilon$ для почти всех $x\in(-\delta, \delta)$. Из теоремы Титчмарша о Q-интегрируемости сопряженной функции ([4], теорема 6) и существенной ограниченности снизу на интервале $(-\delta, \delta)$ функции $\tilde{f}(x)$ следует суммируемость $\tilde{f}(x)$ на любом отрезке, содержащемся в $(-\delta, \delta)$.

Пусть $0<\delta'<\delta$, и $\lambda(x)$ — непрерывная 2π-периодическая функция, равная 1 для $x\in[-\delta'/2, \delta'/2]$, нулю для $\delta' \leqq |x| \leqq \pi$, и линейная на отрезках $[-\delta', -\delta'/2]$, $[\delta'/2, \delta']$. Очевидно, что

$$|\lambda(x_1)-\lambda(x_2)| \leqq K|x_1-x_2|. \tag{14}$$

Обозначим $g(x)=\lambda(x)f(x)$. Тогда функция $\tilde{g}(x)$ суммируема на $[-\pi, \pi]$. Действительно, пусть $\delta'<\delta''<\delta$. Поскольку $g(x)=0$ для $\delta' \leqq |x| \leqq \pi$, то $\tilde{g}(x)$ ограничена для значений $\delta'' \leqq |x| \leqq \pi$. Далее, в силу (14),

$$|\tilde{g}(x)| = (1/\pi)\left|\int_0^{\pi} (\lambda(x+t)f(x+t)-\lambda(x-t)f(x-t))/(2\operatorname{tg} t/2)\,dt\right| \leqq$$

$$\leqq (K/\pi)\int_0^{\pi} [|f(x+t)|+|f(x-t)|]\,dt + \lambda(x)|\tilde{f}(x)| \leqq (K/\pi)\|f\|_1 + |\tilde{f}(x)|.$$

Так как $\tilde{f}(x)$ суммируема на $[-\delta'', \delta'']$, то отсюда следует суммируемость $\tilde{g}(x)$.

Если $h(x)=g(x)-f(x)$, то сопряженная функция $\tilde{h}(x)$ существует и непрерывна в некоторой окрестности нуля. Найдется такое $0<\delta_1<\delta$, что для почти всех $x\in(-\delta_1, \delta_1)$

$$\tilde{g}(x) \geqq \tilde{h}(0)+\tilde{f}(0)+\varepsilon/2 = \tilde{g}(0)+\varepsilon/2.$$

Следовательно, для интеграла Пуассона*) $\tilde{g}(r, x)$ суммируемой функции $\tilde{g}$ выполняется неравенство

$$\varliminf_{r\to 1-0} \tilde{g}(r, 0) \geqq \tilde{g}(0)+\varepsilon/2.$$

Но из существования $\tilde{g}(0)$ следует, что

$$\lim_{r\to 1-0} \tilde{g}(r, 0) = \tilde{g}(0)$$

([5], стр. 172). Полученное противоречие доказывает лемму.

Теорема 2. *Пусть $f\in L$, и E — множество всех тех точек $x\in[-\pi, \pi]$' в которых существует сопряженная функция $\tilde{f}(x)$. Тогда:*

1) *для любого интервала $\Delta\subset[-\pi, \pi]$ и любого подмножества $E'\subset E$ с мерой $|E'|=|E|=2\pi$*

$$\sup_{x\in E'\cap\Delta} \tilde{f}(x) = \sup_{x\in E\cap\Delta} \tilde{f}(x);$$

2) *функция $\tilde{f}(x)$ существенно непрерывна в точке $x_0\in(-\pi, \pi)$ тогда и только тогда, когда $\tilde{f}(x_0)$ существует, и*

$$\lim_{x\to x_0, x\in E} \tilde{f}(x) = \tilde{f}(x_0).$$

Доказательство. Утверждение 1) непосредственно следует из леммы 2. Далее, предположим, что $x_0=0$ и $\tilde{f}(x)$ эквивалентна функции, непрерывной в нуле. Тогда, в силу утверждения 1), существует предел $\lim_{x\to 0, x\in E} \tilde{f}(x)$. Докажем существование $\tilde{f}(0)$. Согласно предположению, найдется такое $\delta>0$, что функция $\tilde{f}(x)$ существенно ограничена на интервале $(-\delta, \delta)$. Определим функцию $\lambda(x)$ так же, как в доказательстве леммы 2. Тогда, полагая $g(x)=\lambda(x)f(x)$, получим, что $\tilde{g}(x)$ существенно ограничена на $[-\pi, \pi]$. Далее, для функции $h(x)=g(x)-f(x)$ сопряженная функция $\tilde{h}(x)$ существует и непрерывна в некоторой окрестности нуля. Стало быть, существует предел

$$\lim_{x\to 0, x\in E} \tilde{g}(x) = s,$$

*) В силу теоремы Смирнова ([3], стр. 583) интеграл Пуассона функции $\tilde{g}$ совпадает с сопряженным интегралом Пуассона функции g.

и для завершения доказательства достаточно установить, что существует $\tilde{g}(0)=s$.

Положим

$$\tilde{g}(x;\, \eta) = -(1/\pi) \int\limits_{\eta}^{\pi} \big(g(x+t)-g(x-t)\big)/(2\operatorname{tg} t/2)\,dt, \quad 0<\eta<\pi.$$

Согласно формуле М. Рисса [6] (см. также [5], стр. 467),

$$\tilde{g}(x;\, \eta) = (1/\pi^2) \int\limits_{-\pi}^{\pi} \tilde{g}(x+t)(1/2)\operatorname{ctg}(t/2) \ln \big|(\sin(t+\eta)/2)/(\sin(t-\eta)/2)\big|\,dt.$$

При этом [6]

$$(1/\pi^2) \int\limits_{-\pi}^{\pi} (1/2)\operatorname{ctg}(t/2) \ln \big|(\sin(t+\eta)/2)/(\sin(t-\eta)/2)\big|\,dt = 1-\eta/\pi. \tag{15}$$

Обозначим подынтегральную функцию в левой части равенства (15) через $\varphi(t, \eta)$. Ясно, что $\varphi(t, \eta)$ неотрицательна, и для любого $t_0>0$ равномерно стремится к нулю при $\eta\to+0$ на каждом из отрезков $[+\pi, -t_0]$ и $[t_0, \pi]$.

Зададим произвольное $\varepsilon>0$. Тогда найдется $\delta_1>0$, такое, что для почти всех $x\in(-\delta_1, \delta_1)$, $|\tilde{g}(x)-s|<\varepsilon$. Учитывая (15) и ограниченность функции $\tilde{g}(x)$, получим при $\eta\to 0$

$$\tilde{g}(0;\, \eta)-s = (1/\pi^2) \int\limits_{-\delta_1}^{\delta_1} [\tilde{g}(t)-s]\varphi(t, \eta)\,dt+o(1).$$

Следовательно, для достаточно малых $\eta>0$ (см. (15))

$$|\tilde{g}(0;\, \eta)-s| < 2\varepsilon,$$

и существует предел $\lim\limits_{\eta\to+0} \tilde{g}(0;\, \eta)=s$. Теорема доказана.

Литература

[1] Н. Н. Лузин, *Интеграл и тригонометрический ряд*, Гостехиздат (Москва—Ленинград, 1951).

[2] А. Лебег, *Интегрирование и отыскание примитивных функций*, Гостехиздат (Москва—Ленинград, 1934).

[3] Н. К. Бари, *Тригонометрические ряды*, Физматгиз (Москва, 1961).

[4] E. C. Titchmarsh, On conjugate functions, *Proc. London Math. Soc.*, **29** (1929), 49—80.

[5] А. Зигмунд, *Тригонометрические ряды. I*, Мир (Москва, 1965).

[6] M. Riesz, Sur les fonctions conjuguées, *Math. Z.*, **27** (1927), 218—244.

ОДЕССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМ. И. И. МЕЧНИКОВА
МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ, КАФЕДРА МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА
УЛ. П. ВЕЛИКОГО 2
270 000 ОДЕССА, СССР